(5×10 p.) **V. Vegyes feladatok.**

1. Mutassa meg, hogy minden $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ szám esetén $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$ teljesül.

Számtani és mértani közép egyenlőtlensége:

$$\frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}} = 1.$$

2. Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 3^n - 2^n}{7 \cdot 6^n}$ sor? Ha igen, számolja is ki az értékét.

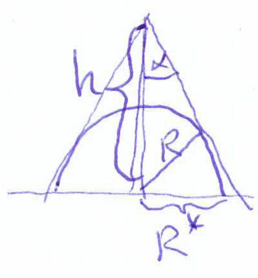
$$\frac{4}{7} \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{3}{6}\right)^n - \frac{1}{7} \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{2}{6}\right)^n = \frac{4}{7} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1}{7} \cdot \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{4}{7} - \frac{1}{14} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$$

Mindkét mértani sor konvergens, mert $|q| < 1$

3. Egy $R \in \mathbb{R}^+$ rugarú félgömb fölé egyenes körkúpot állítunk, úgy hogy a kúp alapköre koncentrikus a félgömb alapkörével. Mekkora legyen a kúp magassága, hogy térfogata a lehető legkisebb legyen.

Hasonló háromszögekből $\operatorname{tg}\alpha = \frac{R^*}{h} = \frac{R}{\sqrt{h^2 - R^2}}$

$$V = \frac{1}{3} h \cdot R^{*2} \pi = \frac{\pi}{3} h \left(\frac{Rh}{\sqrt{h^2-R^2}}\right)^2 = \frac{\pi R^2}{3} \frac{h^3}{h^2 - R^2}$$



Tehát keressük $f(h) = \frac{h^3}{h^2 - R^2}$ ~~maxi~~ minimumát, ha $h > R$. $f' = \frac{3h^2(h^2-R^2) - 2h \cdot h^3}{(h^2-R^2)^2} = \frac{h^2(h^2 - 3R^2)}{(h^2-R^2)^2}$

Ezért f csökken $h \in (R, R\sqrt{3}]$-on, utána nő. Ezért minimális térfogatot $h = R\sqrt{3}$ esetén kapunk.